



数 学

(120分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
また、解答開始の合図があるまで、筆記用具を使用してはいけません。
2. 問題は4問で、8ページあります。
3. 問題冊子の余白は、下書きに使用することができます。
4. 解答開始後、解答冊子の表紙所定欄に受験番号、氏名をはっきり記入しなさい。表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. 解答は、すべて解答冊子の指定されたページに書きなさい。解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。解答冊子を持ち帰ってはいけません。

- 1 (1) 等式 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$ が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。
- (2) 関数 $f(x) = 4 \log_5 x + 1$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (3) 座標平面上の点 O, A, B について、 $|\vec{OA}| = 2, |\vec{OB}| = 3, \angle AOB = \frac{\pi}{6}$ とする。また、実数 u, v に対して点 P を $\vec{OP} = u\vec{OA} + v\vec{OB}$ と定める。 u, v が $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 2$ を満たしながら変化するとき、点 P が存在しうる領域の面積 S を求めよ。
- (4) $a > 0$ とする。放物線 $y = ax^2 - 5$ と x 軸で囲まれた部分を、 y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積が 500 となるときの a の値を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

2 関数 $f(x) = (-2 \cos^2 x + \cos x + 1) \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\right)$ を考える。

- (1) 定数 a, b, c, d を用いて $f'(x) = a \cos^3 x + b \cos^2 x + c \cos x + d$ と表せることを示して, a, b, c, d の値を求めよ。
- (2) $f(x)$ が最大になるときの $\cos x$ の値を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

3 複素数 z に対して $w = \frac{z+1}{z-i}$ とする。ただし、 i を虚数単位とする。

- (1) $z = -i$ のとき、 $|w|$ および w の偏角 θ を求めよ。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (2) $\overline{z-i} = w$ を満たす z を求めよ。
- (3) z を w の式で表せ。
- (4) 複素平面上の点 w_1 は、点 w を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転させた点とする。
 $w_1 = 1 - \sqrt{3}i$ となるような z を求めよ。
- (5) 点 z が実軸上を動く、すなわち $z = \bar{z}$ を満たしながら動くとき、点 w は複素平面上でどのような図形を描くか。

数学の試験問題は次に続く。

4 1つのさいころを投げる試行を繰り返し、以下の (i) または (ii) の場合に試行を終了する。ただし、1回目は (i) の場合にのみ試行を終了する。

(i) 4, 5, 6 のいずれかの目が出る。

(ii) 1回前に出た目より小さい目が出る。

n 回目に X の目が出て、かつ試行が終了しない確率を $P_n(X)$ とする。例えば $P_1(1) = \frac{1}{6}$ である。

(1) $P_3(1)$ と $P_n(1)$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ とする。 $P_n(2)$ を $P_{n-1}(1)$ と $P_{n-1}(2)$ を用いて表せ。

(3) $T_n = 6^n P_n(2)$ とおく。 T_n と $P_n(2)$ を求めよ。

(4) $n \geq 2$ とする。 $P_n(3)$ を $P_{n-1}(1)$, $P_{n-1}(2)$, $P_{n-1}(3)$ を用いて表せ。

(5) $P_n(3)$ を求めよ。

(6) 試行が n 回目に終了する確率 Q_n を求めよ。

数学の試験問題はこれで終わりである。